IR ATÉ AO INFINITO... E VOLTAR! *

António Monteiro

Antes de mais, agradeço à Srª Drª Teresa Machado, amiga de longa data, a amabilidade de me ter convidado para vir hoje à Escola Secundária Professor Herculano de Carvalho, para conversar um pouco convosco. É a segunda vez que aqui venho, tendo-o feito anteriormente a convite da Srª Drª Maria João Estaca.
Pensando num assunto para abordar nesta sessão, ocorreu-me o do Infinito. Nem menos! A ambição é portanto grande, veremos se as forças a acompanham.

O infinito na Filosofia

A questão do infinito é, antes de tudo, uma questão filosófica, embora, até ao século XIII, a questão do infinito não se tenha colocado, em termos conceptuais, no pensamento filosófico ocidental.
Parménidas de Eleia (c.540-450 a.C.) afirmava que o ser, o que existe, é imutável, indestrutível, homogéneo, indivisível, esférico e finito!
Aristóteles (384-322 a.C.) afirma que, no mundo supra-lunar, que é o do céu e dos astros, não existe geração nem corrupção e que lá existem seres animados eternos, que se movem sem sofrerem qualquer oposição, por isso num movimento regular, perfeito e circular. Para Aristóteles, o universo é cosmos, um todo ordenado, acabado e finito, mas Deus não criou o mundo: este é eterno e Deus é somente o princípio do movimento do universo e o fim para que este se orienta.
Já para o Cristianismo antigo, o infinito não é uma característica do Universo, mas sim de Deus: é Deus que é infinitamente bom, misericordioso, justo e providente. Deus criou o mundo a partir do nada — ideia que é estranha à filosofia grega e que acentua o poder ilimitado de Deus. Para S. Tomás de Aquino (1225-1274), o mundo pode ser simultaneamente eterno e criado.

O infinito na Cabala judaica

No século XVI, na cidade de Safed, na Galileia, foram estabelecidos, pelos rabis hebraicos, os fundamentos da Cabala — sistema de misticismo secreto e de meditação dos judeus (a tradição "recebida"), durante séculos transmitida oralmente de mestre a discípulo —, tal como é praticada hoje. No centro da Cabala estão dez Sefirot, que ocupam um espaço multidimensional e representa determinadas qualidades e cores, ou partes do corpo humano; por trás dos dez Sefirot está Deus — entidade tão vasta e suprema que os Cabalistas lhe dão o nome de Ein Sof: infinidade! Deus, enquanto infinidade, não pode ser descrito nem compreendido.
O misticismo judeu tem, entre os seus objectivos, a contemplação de uma luz infinitamente brilhante que simboliza o *chaluk*, ou traje, que cobria Deus, quando apareceu a Moisés, no Monte Sinai. Segundo a lenda, o importante rabi Joseph Ben Akiva (c. 50-132) entrou nos palácios da meditação e contemplou o *chaluk*, acompanhado pelo rabi Ben Azai, que morreu, pelo rabi Ben Abuya, que viu dois deuses em vez de um e se tornou apóstata, e pelo rabi Ben Zoma, que enlouqueceu. Curiosamente, alguns dos matemáticos que, no início do século XX, se dedicaram ao estudo da Lógica e da Teoria de Conjuntos e, em particular, dos conjuntos infinitos, entre eles Georg Cantor, Ernst Zermelo e Kurt Gödel, viriam a ter um destino não muito distante do do rabi Ben Zoma, sofrendo, igualmente, de perturbações mentais de diversas ordens.

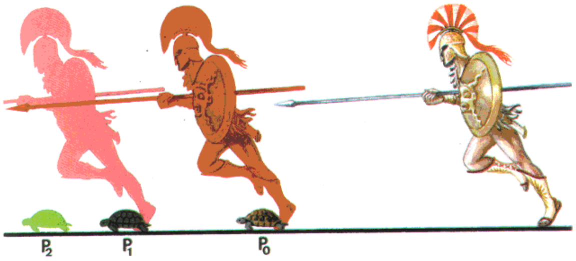
O século XVI

Nicolau de Cusa (1401-1464) sublinha que os contrários coincidem no infinito: se o diâmetro de um círculo se estende até ao infinito, a sua circunferência coincide com uma linha recta, pelo que será simultaneamente recta e curva e nele coincidirão os dois contrários. Por sua vez, Nicolau Copérnico (1473-1543) defendia que se deixasse para os filósofos a questão de saber se o mundo é finito ou infinito.
Giordano Bruno (1548-1600), aceitando a teoria heliocêntrica, afirma a infinitude do Universo, declarando que existem inúmeros sistemas solares como o nosso, nada obstando a que existam seres vivos e racionais noutras partes do cosmos: o Homem e a Terra não ocupam qualquer posição de privilégio no Universo!
Galileu Galilei (1564-1642) dizia que "um móbil, projectado sobre um plano horizontal do qual se tirou qualquer atrito, [...] desenvolverá sobre tal plano um movimento uniforme e perpétuo, na suposição de que este plano se prolongue até ao infinito" — pressuposto que, contudo, não admite. De resto, já Aristóteles tinha formulado explicitamente — para imediatamente a rejeitar, por absurda — a lei da inércia: "[o corpo] ou estará em repouso ou necessariamente será levado ao infinito, se outra coisa mais forte não o detiver".

Os séculos XVII e XVIII

René Descartes (1596-1650) distingue três tipos de ideias: as ideias adventícias — que são as que parecem provir da nossa experiência externa, como a ideia de "homem", de "árvore" ou de "cor" —, as ideias factícias — que a mente constrói a partir de outras ideias, como a ideia de um "cavalo com asas" — e as ideias inatas — aquelas que o pensamento possui em si mesmo: entre elas, a ideia de infinito, que Descartes identifica com a ideia de Deus.
Gottfried von Leibniz (1646-1716) nega que a extensão seja a essência da realidade corpórea e chega à conclusão de que existe uma infinidade de substâncias simples, inextensas, a que chama mónadas. Para Immanuel Kant (1724-1804), o espaço e o tempo são grandezas infinitas: toda a grandeza espacial determinada só é possível por limitação do espaço infinito e vazio e toda a grandeza temporal determinada só é possível por limitação do tempo único infinito.
No campo, mais restrito, da Matemática, uma das primeiras utilizações do infinito encontra-se nos paradoxos atribuídos a Zenão de Eleia (495-435 a.C.), nomeadamente no famoso paradoxo de Aquiles e da

Tartaruga, ou no da Dicotomia: Zenão defendia que, admitindo-se que o espaço e o tempo fossem infinitamente divisíveis, o movimento era impossível. Muitos séculos mais tarde, a formulação rigorosa da noção de limite e, em particular, o estudo das séries, viriam e explicar os vícios em que baseava os seus argumentos.



O paradoxo de Aquiles e da tartaruga

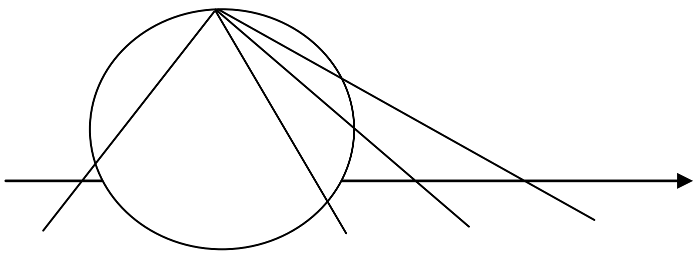
Eudoxo de Cnidus (408-355 a.C.) e Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) usaram quantidades infinitamente pequenas para calcular áreas e volumes, através do chamado método de exaustão. Mais de dois mil anos depois, a Análise não-standard viria a dar um sentido preciso a muitas construções do mesmo tipo. Eudoxo mostrava que não é preciso admitir a existência real de uma infinidade de quantidades infinitamente pequenas, mas apenas a existência de quantidades tão pequenas quanto se quiser — infinito potencial, em confronto com o infinito real ou actual —, o que permitiria, mais tarde, o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal.
As conotações filosóficas — quando não místicas — do infinito não podem deixar de dificultar, até certo ponto, a utilização de uma noção designada pelo mesmo termo, na Matemática, acabando mesmo por provocar algumas confusões entre os menos experientes. O que é verdade é que, dentro do rigor que se exige a esta ciência, o infinito não é, em muitos casos, senão uma maneira cómoda de designar situações em que apenas se lida com números.

O infinito e os "infinitamente grandes"

Assim, por exemplo, quando dizemos, de uma dada sucessão de números reais, de termo geral a_n, que é "infinitamente grande", digamos positivo, ou que "tende para $+\infty$", essa afirmação não envolve uma entidade definida previamente como "infinito" — ao contrário do que muitos estudantes, porventura menos esclarecidos sobre o assunto, supõem —, mas apenas um comportamento especial da sucessão em causa, a saber, o de ultrapassar, a partir de determinada ordem, qualquer número antecipadamente estabelecido. Nada há, aqui, de autenticamente infinito. No entanto, a intuição leva-nos, frequentemente, a encarar este tipo de sucessão de números reais como se caminhasse paulatinamente para um ponto situado para além do horizonte, como Lucky Luke cavalgando em direcção ao sol poente, no final de cada nova aventura...
É de evitar a confusão: não se deve pensar em "$+\infty$" como se fosse um número, muito menos "fazer contas" com uma tal entidade. As definições relacionadas com a noção de limite têm de ser bem entendidas e aplicadas com rigor.
A própria representação dos números reais como pontos de uma recta, na qual se fixou uma origem e definiu um comprimento unitário, a isso conduz, pois a linha recta — "que não tem princípio nem fim", como é muitas vezes frisado na instrução primária — é, por sua vez, um exemplo paradigmático do infinito actual.
Noutras circunstâncias, também o uso do infinito é adoptado, como imagem sugestiva, que ajuda à compreensão de conceitos ou construções mais arrevesadas.

Uma recta estende-se "até ao infinito", mas pode relacionar-se com uma circunferência.

Representemos os números reais, como é habitual, ao longo de um eixo, mas consideremos, simultaneamente, uma circunferência — por exemplo, e para maior comodidade, tangente ao referido eixo, na origem — à qual se suprimiu a extremidade I do diâmetro que passa pelo ponto de tangência:



Se unirmos o ponto I com cada um dos pontos do eixo real, os segmentos de recta que vamos determinando encontram a circunferência em diferentes pontos, estabelecendo uma bijecção entre a recta — logo, entre o conjunto dos números reais — e os pontos da circunferência, exceptuando I.
Essa bijecção respeita a estrutura topológica da recta real, no sentido de que, intuitivamente falando, "pontos próximos" se transformam em "pontos próximos". Se, por sua vez, voltarmos a incorporar na circunferência o ponto I, podemos considerar este como um ponto "no infinito", no sentido de que quanto mais afastado estiver um ponto da recta da origem — isto é, quanto mais elevado for o seu valor absoluto —, tanto mais próximo de I estará o seu correspondente.
Dificilmente se poderá conceber um "infinito" mais próximo de nós do que o ponto I. O infinito fica, efectivamente, "já ali"...

Os trabalhos de Georg Cantor

Do ponto de vista do estudo do infinito actual, isto é, dos conjuntos infinitos, é incontornável a figura de Georg Cantor. Oriundo de uma família de emigrantes, que chegou à Alemanha, vinda da Península Ibérica, da Dinamarca e da Rússia, Cantor nasceu em 3 de Março de 1845, portanto há pouco mais de 157 anos. Doutorou-se em Matemática, no ano de 1869, na Universidade de Berlim, à época uma das mais importantes da Europa, na área da Matemática, mas só obteve colocação na muito menos conceituada Universidade Friedrich, em Halle. A partir de 1884, depois de ter desenvolvido as suas profundas teorias sobre o conceito de cardinal e, em particular, sobre a hipótese do contínuo, começou a sofrer de perturbações mentais, incluindo depressão profunda, e veio a morrer em 6 de Janeiro de 1918, na Halle Nervenklinik, hospital psiquiátrico universitário em Halle. O cemitério onde o seu corpo foi sepultado já não existe, mas a lápide que marcava a campa de Cantor foi mudada — sem o corpo — para um outro cemitério de Halle.

Se bem que já Galileu, em 1638, tivesse estabelecido uma correspondência bijectiva entre os números naturais e os quadrados dos números naturais, e concluísse, pela voz da sua personagem Salviati, que "há tantos quadrados como números", é a Cantor que devemos, mais de duzentos anos depois, um tratamento sistemático e rigoroso destas situações.

Na verdade, o aspecto mais chocante e relevante no tratamento dos conjuntos infinitos — de resto, a propriedade que perfeitamente caracteriza a sua infinitude, ao ponto de ser usada como definição de "conjunto infinito" — é, precisamente, a sua capacidade de poder emparelhar-se bijectivamente com uma sua parte própria. Quando, de um conjunto finito, extraímos apenas uma parte, obtemos um conjunto "menor", sito é, "com menos elementos" do que o todo; mas se o conjunto inicial for infinito, isso não é necessariamente assim. Se de um cesto com uma infinidade de maçãs, numeradas sequencialmente $m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots$, retirarmos, por exemplo, as primeiras duas, obtemos um conjunto ainda infinito $m_3, m_4, \ldots$, que se pode pôr em correspondência bijectiva com o primeiro, mediante a aplicação definida por $m_i \mapsto m_{i+2}$ $(i = 1,2,3,\ldots)$; o mesmo acontece se retirarmos do cesto todas as maçãs de índice ímpar, já que o conjunto das maçãs de índice par estão em correspondência bijectiva com o todo através da aplicação definida por $m_i \mapsto m_{2i}$ ($i = 1,2,3,\ldots$)

O Hotel de Hilbert

Este facto espantoso foi posto em relevo por David Hilbert (1862-1943), de forma divertida, considerando um hotel com uma infinidade de quartos: mesmo que todos os quartos do hotel se encontrem ocupados, há sempre lugar para mais um hóspede — pedindo a cada um dos que já se encontram instalados que mude de quarto, segundo a regra $q_i \mapsto q_{i+1}$ ($i = 1,2,3,\ldots$), que liberta o quarto número 1 —, o mesmo acontecendo se ao hotel, já cheio, chegar imprevistamente uma infinidade de hóspedes, $h_1, h_2, h_3, h_4, \ldots$ — que poderemos albergar nos quartos de número ímpar, solicitando aos anteriores ocupantes de todos os quartos a mudança $q_i \mapsto q_{2i}$ ($i = 1,2,3,\ldots$).

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & \ldots \end{array}$$

Uma bijecção entre os naturais e os pares

A equipotência

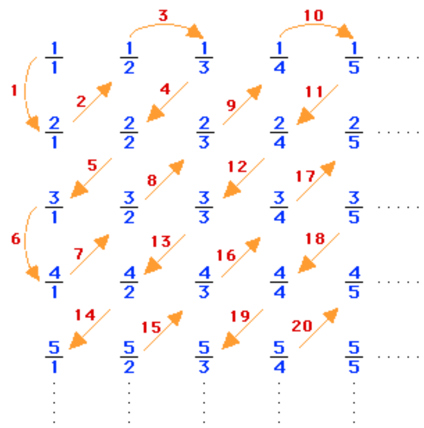
É claro que, quer nas conclusões de Galileu, quer no engraçado exemplo de Hilbert, se lida apenas com o infinito discreto, que pode ser contado através dos números naturais. Em linguagem moderna, diremos que se trata de conjuntos numeráveis ou contáveis. Mas o mesmo comportamento viria a ser detectado no infinito contínuo dos números reais pelo padre checo Bernhard Bolzano (1781-1848), professor de filosofia da religião na Universidade de Praga. Usando a noção de função — coisa muito menos vulgar, naqueles tempos, do que nos parece hoje —, estabeleceu a existência de tantos número reais no intervalo $[0,1]$ como no intervalo $[0,2]$, para o que bastou, evidentemente, considerar a função definida por $y = 2x$. Deve, contudo, observar-se que as ideias de Bolzano, muitas delas incluídas no livro *Paradoxien des Unendlichen* ("Paradoxos do Infinito"), publicado dois anos depois da morte do autor, foram relativamente pouco apreciadas pelos seus contemporâneos.

O conceito de equipotência – dois conjuntos são "equipotentes" quando se pode estabelecer entre eles uma aplicação bijectiva – estende, para conjuntos quaisquer, a noção de "ter o mesmo número de elementos", que se aplica a conjuntos finitos. Para conjuntos infinitos deixa de fazer sentido dizer que têm o mesmo número de elementos, podendo dizer-se em vez disso que dois conjuntos equipotentes têm o mesmo "cardinal".

Na Universidade de Berlim, já em meados do século XIX, o alemão Bernhard Riemann (1826-1866) estendeu as ideias de Bolzano, mostrando uma bijecção entre os pontos de um plano e os pontos de uma esfera, excepto um — que, se acrescentado aos outros, torna o respectivo espaço compacto —, com uma construção em tudo semelhante à que esboçámos acima, com uma recta e uma circunferência. E essas esferas onde o "infinito" aparece como um ponto bem definido não podem deixar de nos fazer lembrar as esferas concêntricas da Cabala ou da *Divina Comédia*, de Dante, ambas conduzindo a um ponto último representando a divindade...

Naturalmente que nem todos os matemáticos acompanhavam com o mesmo entusiasmo os avanços dados por gigantes como Taylor, MacLaurin, Gauss, Dirichlet ou Weierstrass ao campo da Análise Matemática, que os obrigava a lidar com o contínuo. Típica da posição contrária ficou a atitude de Leopold Kronecker (1823-1891), que preferia dedicar-se exclusivamente ao estudo dos elementos discretos da Teoria dos Números e da Álgebra, desprezando o Cálculo Infinitesimal; é sua a célebre frase "Deus criou os números naturais, o resto é obra do homem". Foi

também Kronecker que mais ferozmente se opôs às teorias do jovem Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, impedindo-o, por exemplo, de alcançar uma posição na Universidade de Berlim. Também Henri Poincaré (1854-1912), o famoso matemático francês, terá dito que a teoria de conjuntos, desenvolvida por Cantor, não passava de uma doença perversa, de que a matemática prontamente se curaria... David Hilbert, porém, era de opinião de que "ninguém nos havia de expulsar do paraíso que Georg Cantor nos revelou".
A oposição de homens tão importantes como Kronecker não pôde deixar de causar a Cantor os maiores dissabores, ao longo de quase toda a sua vida de professor e investigador. Obteve, no entanto, substancial apoio, não só para a prossecução dos seus estudos em áreas pouco ortodoxas, mas também para a publicação dos resultados, do matemático sueco Gösta Mittag Leffler (1846-1927), bem conhecido, entre outras coisas, pelas suas desavenças com Alfred Nobel, e também de Richard Dedekind (1831-1916).
O trabalho monumental de Cantor sobre o conceito de infinito começou com o estudo de conjuntos, mais particularmente com o estudo de conjuntos de limites de sucessões de números racionais, num determinado intervalo da recta real.
Deve-se, por exemplo, a Cantor, a prova de que o conjunto dos números racionais se pode pôr em correspondência bijectiva com o dos números inteiros – os dois conjuntos são, como diríamos modernamente, equipotentes. A demonstração de Cantor, que data de 1874, utiliza um processo famoso que se pode resumir do seguinte esquema em que, por conveniência, pensamos apenas em números naturais e em fracções positivas:



Nem todos os conjuntos infinitos são equipotentes entre si

A verificação de que conjuntos infinitos de tamanhos aparentemente diferentes, como os dos números naturais, dos naturais pares, dos inteiros ou dos racionais, eram, afinal, equipotentes e podiam, de certo modo, ser encarados como tendo "o mesmo número de elementos", poderia levar à suposição de que o mesmo se aplicaria a qualquer par de conjuntos infinitos. Também se deve a Cantor a demonstração de que isso não acontece: entre 1873 e 1874, Cantor demonstrou que o conjunto dos números reais no intervalo $]0,1[$ não se pode pôr em correspondência bijectiva com o conjunto dos números naturais. A demonstração assenta num espectacular raciocínio diagonal, que podemos resumir do seguinte modo: admitindo que todos os números do intervalo $]0,1[$, escritos na forma de dízimas infinitas, se pudessem emparelhar com os naturais, segundo um esquema do tipo

$$\begin{array}{lcl} 1 & \mapsto & 0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\cdots \\ 2 & \mapsto & 0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\cdots \\ 3 & \mapsto & 0,a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\cdots \\ 4 & \mapsto & 0,a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\cdots \\ 5 & \mapsto & 0,a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\cdots \\ \vdots & & \quad\vdots \end{array}$$

então o número $0,x_1x_2x_3x_4x_5\cdots$, em que, para cada natural *i*, $x_i = \begin{cases} 9 & \text{, se } a_{ii} \neq 9 \\ 1 & \text{, se } a_{ii} = 9 \end{cases}$, necessariamente falta na lista considerada, o que é absurdo.
Este magnífico argumento provava a existência de vários níveis de infinidade. Os conjuntos infinitos não eram todos equipotentes entre si, não eram todos "do mesmo tamanho". Havia infinitos maiores que outros. E a sequência de resultados bizarros assim a pouco e pouco estabelecidos não ficou por aqui. Em 29 de Junho de 1877, Cantor escrevia uma carta entusiástica ao seu amigo Dedekind, dando-lhe conta de uma das suas últimas conclusões: o número de pontos num segmento de recta é o mesmo — sempre no sentido, evidentemente, de que os conjuntos se podem pôr em correspondência bijectiva — que o número de pontos num quadrado, ou num cubo, ou num espaço a *n* dimensões! E escreveu Cantor, nessa carta que enviou a Dedekind: "*Je le vois, mais je ne le crois pas*"!

O alef

Daí à classificação dos infinitos, ao conceito de cardinal transfinito, começando pelo mais baixo de todos, correspondente ao conjunto dos números naturais — prova-se que em todo o conjunto infinito há partes numeráveis — e designado por $\aleph_0$, foi um pulo. Nem todos os historiadores da Matemática concordam com o facto de Cantor ser judeu, ou, pelo menos, de origem judaica, embora isso seja muito provável, a julgar por alguns documentos, por exemplo, uma carta enviada a Cantor por um dos seus irmãos. Mas, quer fosse ou não judeu, é muito natural que Cantor conhecesse o uso da primeira letra do alfabeto hebraico, $\aleph$ (alef) para simbolizar Deus, o Ein Sof, a infinidade. Pessoa de fé, Cantor afirmava que havia sido o próprio Deus a revelar-lhe a existência dos números transfinitos.
Como frequentemente acontece, o progressivo avanço do estudo fazia surgir pelo menos tantos mistérios quantos os que desvendava e tantas interrogações quantas aquelas a que dava resposta.

O Teorema de Cantor

Se havia diferentes níveis de infinidade ($\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots$), terminaria a lista algures? Um famoso teorema, que hoje conhecemos, precisamente, como o Teorema de Cantor — e cuja demonstração usual tem fortes semelhanças com o processo de diagonalização usado para provar que os naturais não são equipotentes aos reais —, segundo o qual o cardinal do conjunto das partes de um dado conjunto é sempre estritamente superior ao cardinal do conjunto dado, diz-nos que não: a lista prossegue indefinidamente!

Como se poderiam estender aos cardinais transfinitos as operações de adição e multiplicação, vulgares quando se lida com cardinais finitos, isto é, com números naturais? As regras operatórias são surpreendentes, já que, por exemplo, $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ (juntando o número 1 ao conjunto constituído pelos números 2,3,4,5,6,..., obtemos os números naturais), $\aleph_0 + n = \aleph_0$, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ (juntando os naturais pares aos ímpares, obtemos todos os naturais), $\aleph_0 \times n = \aleph_0$ e $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$.

E quanto ao que se passa entre um cardinal transfinito e outro? Haverá ou não cardinais estritamente compreendidos entre $\aleph_0$, o cardinal do conjunto dos números naturais, e *c*, a potência do contínuo, isto é, o cardinal do conjunto dos números reais? Cantor sabia que $c = 2^{\aleph_0}$, mas seria verdade que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$? A conjectura de que assim acontecesse, formulada por Cantor, é conhecida como a "hipótese do contínuo". É possível que os muitos esforços que Cantor desenvolveu para provar a veracidade ou a falsidade de uma tal conjectura contribuíssem para esgotar as suas resistências, agravando-lhe os problemas mentais de que sofreu persistentemente, nas últimas décadas da sua vida. Não nos admira que os seus esforços fossem vãos, pois, em 1938, o célebre matemático e lógico Kurt Gödel provou que, desde que a Teoria de Conjuntos seja consistente, a adjunção, como axioma, da hipótese do contínuo não provoca qualquer contradição; em 1963, Paul Cohen demonstrou que, se a Teoria de Conjuntos for consistente, a adjunção, como axioma, da negação da hipótese do contínuo também não provoca contradições.

Muito mais, evidentemente, haveria que dizer. O infinito — pela sua própria natureza — está longe de se esgotar. Mas a sessão já vai longa. Continuar, ou entrar em temas e pormenores de carácter mais técnico, seria correr o risco de transformar uma conversa, que se quer agradável, numa espécie de aula, provavelmente importuna e quiçá enfadonha.

Fiquemos, pois, por aqui.

* Escola Secundária Professor Herculano de Carvalho, Lisboa, 25 de Fevereiro, 2010